Διάλεξη 4η   ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛ. ΓΕΩΜ.

25/11/2019

(Θ1) Στην απόλυτη γεωμετρία, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, είναι το πολύ 2 ορθές

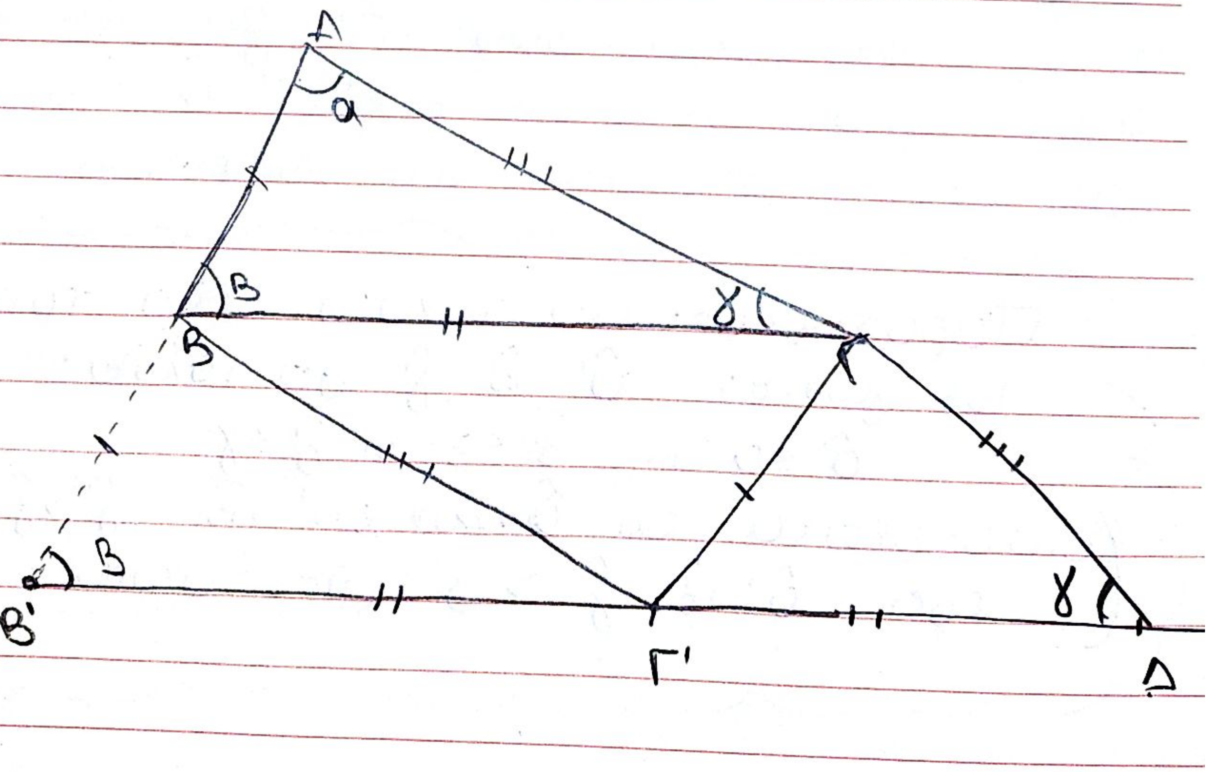
(Θ2) Αν σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι 2 ορθές, τότε ισχύει το αξίωμα της παραλληλίας.

Θεώρημα: Αν σε ένα τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών είναι ίσο με 2 ορθές $\Rightarrow$ σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών είναι ίσο με 2 ορθές.

Απόδ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma} = 2$ ορθές

Ισχυρισμός: Δοθέντος του ΑΒΓ μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο με ίσες γωνίες και και πλευρές οποιοδήποτε πολ/σιο των πλευρών του ΑΒΓ.



Τα $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{BB'\Gamma'}$ αφού $\begin{cases} AB = BB' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ A\hat{B}\Gamma = B\hat{B'}\Gamma' \ (*) \end{cases}$ (ΠΓΠ)

Εφόσον είναι ίσα θα είναι ίσες και οι υπόλοιπες γωνίες
Συγκρίνω τα: $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{B\Gamma\Gamma'}$ αφού $\begin{cases} A\Gamma = B\Gamma' \text{ από } (*) \\ B\Gamma : \text{κοινή} \\ A\hat{\Gamma}B = \Gamma'\hat{B}\Gamma \end{cases}$

Αυτό σημαίνει ότι $\Gamma'\hat{B}\Gamma = 2$ ορθές $- (\hat{a}+\hat{B})$
$A\hat{\Gamma}B \overset{(*)}{=} 2$ ορθές $- (\hat{a}+\hat{B})$

Έπειτα βάζοντας ένα σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ ημιευθείας, δημιουργεί το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Gamma\Gamma'\Delta}$ για το οποίο ισχύουν τα προηγούμενα και πάει λέγοντας...
Επομένως για οποιοδήποτε τρίγωνο και να δημιουργηθεί θα ισχύει ο ισχυρισμός
Για να έχω όμως τρίγωνο (και να ισχύει ο ισχυρισμός) πρέπει $\hat{\Gamma}_1' + \hat{\Gamma}_2' + \hat{\Gamma}_3' = 2$ ορθές
κάτι που ισχύει αφού $\hat{\Gamma}_1' = \hat{\gamma}$, $\hat{\Gamma}_2' = \hat{a}$, $\hat{\Gamma}_3' = \hat{B}$
άρα από υπόθεση Β', Γ', Δ: συνευθειακά
και έτσι απέδειξα τον ισχυρισμό.

Παρατήρηση: Για τυχαίο άλλο τρίγωνο με γωνίες $\hat{a}'$, $\hat{B}'$, $\hat{\gamma}'$ θα ισχύει:
$\hat{a}' \le a$ ή $\hat{B}' \le B$ ή $\hat{\gamma}' \le \gamma$
(διαφορετικά, αν $\hat{a}' > \hat{a}$, $\hat{B}' > \hat{B}$, $\hat{\gamma}' > \hat{\gamma}$
τότε $\hat{a}' + \hat{B}' + \hat{\gamma}' > 2$ ορθές: άτοπο)

Έστω τυχαίο $A'\hat{B}'\Gamma'$

(Συνέχεια απόδειξης) $xB\gamma$ υποθέτω ότι $\hat{\alpha}' \le \hat{\alpha}$

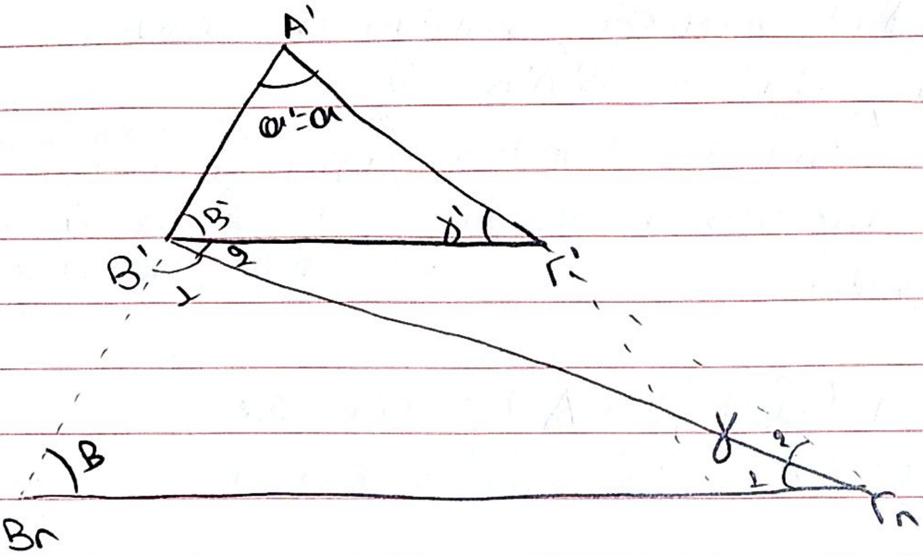
Θα διακρίνω 2 περιπτώσεις:

(1) $\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}$

(2) $\hat{\alpha}' < \hat{\alpha}$.

1η περίπτωση: Έχω $A\hat{B}\Gamma$ τ.ω $\hat{\alpha}+\hat{B}+\hat{\gamma} = 2$ ορθές.

Έστω τυχαίο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$: $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$ Θ.δ.ο $\hat{\alpha}'+\hat{B}'+\hat{\gamma}' = 2$ ορθ



Δοθέντος του $A\hat{B}\Gamma$ και βάσει του προηγούμενου ισχυρισμού (και αξιώματος συνέχειας) υπάρχουν σημεία B_n, Γ_n έτσι ώστε $A'B_n > AB$, $A'\Gamma_n > A\Gamma$

και $\hat{A}' = \hat{\alpha}$, $\hat{B}_n = \hat{B}$, $\hat{\Gamma}_n = \hat{\gamma}$

Για να αποδείξω το ζητούμενο, φέρνω την διαγώνιο: Παρατηρώ στα τρίγωνα ότι $\overset{\triangle}{B'B_n\Gamma_n}$ και $\overset{\triangle}{B'\Gamma'\Gamma_n}$ λόγω ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ≤ 2 ορθών, έχω ότι $(\hat{B}_1'+\hat{B}+\hat{\gamma}_1)+(\hat{B}_2'+\hat{\Gamma}'+\hat{\gamma}_2) \le$ 4 ορθές

$\Rightarrow \underbrace{(\hat{B}_1'+\hat{B}_2')} + (\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2) + \hat{\Gamma}' + \hat{B} \le 4$ ορθών

$\Rightarrow$ 2 ορθές $- \hat{B}' + \hat{\gamma}' + ($2 ορθές$) + \hat{B} \le 4$ ορθές

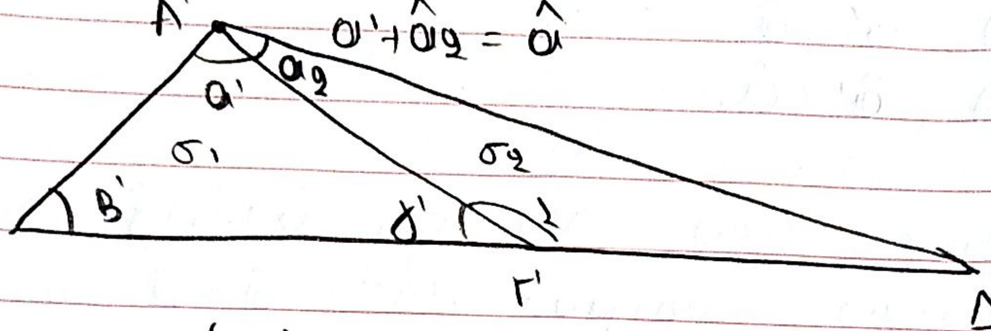
$\Rightarrow \boxed{\hat{B}+\hat{\gamma} \le \hat{B}'+\hat{\gamma}'}$

2 ορθή $= \hat{\alpha}+\hat{B}+\hat{\gamma} = \hat{\alpha}'+\hat{B}+\hat{\gamma} \le \hat{\alpha}'+\hat{B}'+\hat{\gamma}' \le 2$ ορθών

Σω επισ έπεται ότι $\hat{\alpha}'+\hat{B}'+\hat{\gamma}' = 2$ ορθές

2η περίπτωση: Έστω τυχαίο τρίγωνο $\overset{\triangle}{Α'Β'Γ'}$: $\hat{α}' < \hat{α}$ θδο $\hat{α}'+\hat{β}' + \hat{γ}' = 2$ ορθές

$\hat{α}' + \hat{α}_2 = \hat{α}$



Από αξίωμα (Ι4) υπάρχει σημείο Δ στην προέκταση του Β'Γ' : $Β'\hat{Α}'Δ = \hat{α}$.

Όμοια με πριν (*) σ1+σ2 ≤ 4 ορθές.

Από προηγούμενο ισχυρισμό έπεται ότι $\hat{α} + \hat{β}' + \hat{Δ} = 2$ ορθές

Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{Α'Β'Δ}$ μία γωνία του είναι η $\hat{α}' + \hat{α}_2 = \hat{α}$ του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ όπου γνωρ. ότι $\hat{α}+\hat{β}+\hat{γ} = 2$ ορθ.

(*) : $(α'+β'+γ') + (\hat{α}_2 + \hat{γ}_1' + \hat{Δ}) = σ_1 + σ_2$

$\Rightarrow (\underbrace{α' + \hat{α}_2}_{\hat{α}} + \hat{β}' + \hat{Δ}) + (\hat{γ}' + \hat{γ}_1') = σ_1 + σ_2$

$\Rightarrow 2$ ορθές $+ (\hat{γ}' + \hat{γ}_1') \leq σ_1 + σ_2$

$\Rightarrow 2$ ορθές $+ 2$ ορθές $= σ_1 + σ_2$

$\Rightarrow 4$ ορθές $= σ_1 + σ_2$ και αφού $σ_1 + σ_2 \leq 4$ ορθές

με $σ_1, σ_2 \leq 2$ ορθές

$\Rightarrow σ_1 = σ_2 = 2$ ορθές

$\Rightarrow \hat{α}' + \hat{β}' + \hat{γ}' = 2$ ορθές.

Θεώρημα: Το αξίωμα της παραλληλίας είναι ισοδύναμο με: "το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές".

Απόδ

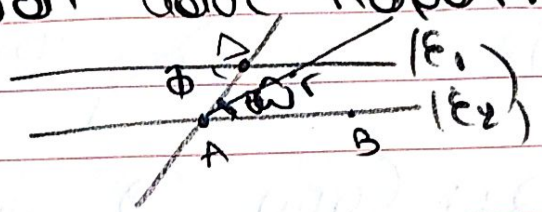
Αποδ

(⇐) αν το άθροισμα των γωνιών είναι 2 ορθές => το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου = 2 ορθές => ισχύει το αξίωμα της παραλληλία

(⇒) Έστω ότι ισχύει το αξίωμα της παραλληλίας. Παρατηρώ ότι: α) αν μια ευθεία τέμνει μια άλλη τότε τέμνει και κάθε παράλληλη της.

$(ε_1)//(ε_2)$

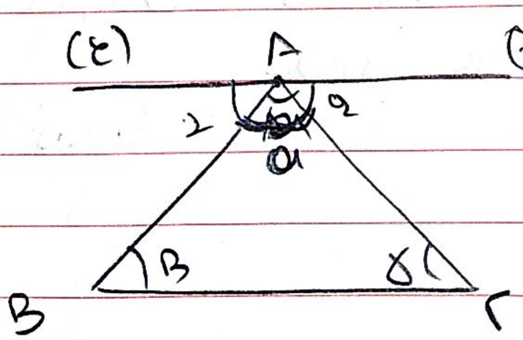
με τέμνει ε



=> η (ε) τέμνει την $(ε_2)$, γιατί αν δεν την έτεμνε τότε από $(ε_2)$ και σημείο Α εκτός διέρχονται 2 παράλληλες της $(ε_2)$, άτοπο στο αξίωμα της παραλληλία.

Β) Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες: $\hat{φ}=\hat{ω}$ γιατί αν $\hat{φ}\neq\hat{ω}$ τότε υποθέτω (ΧΒΓ) ότι $\hat{ω}>\hat{φ}$ άρα από αξίωμα (14) υπάρχει ημιευθεία έτσι ώστε να σχηματίζεται η φ. Που σημαίνει ότι θα έχω βρει 2 παράλληλες για την $(ε_1)$ το οποίο είναι άτοπο στο αξίωμα της παραλληλία.

Έστω τυχαίο $A\hat{B}Γ$ θέλω $\hat{α}+\hat{β}+\hat{γ}$ = 2 ορθές



Θεωρώ την (ε)//ΒΓ

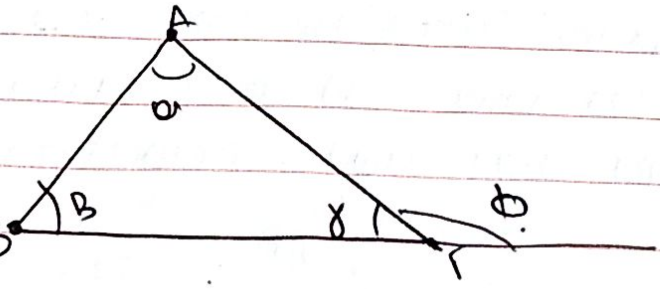
$\hat{A}_1+\hat{α}+\hat{A}_2$ = 2 ορθές

$\hat{B}+\hat{α}+\hat{γ}$ = ορθές

και έδειξα το ζητούμενο

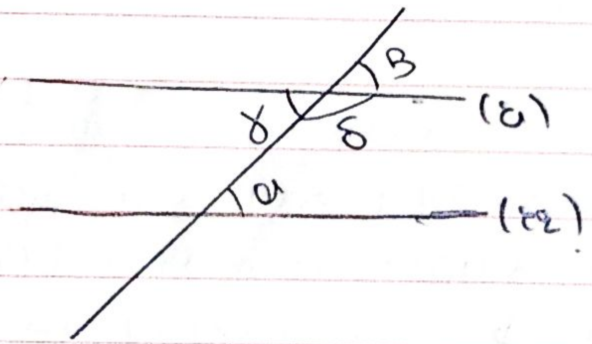
Ευκλείδια Γεωμετρία

Πόρισμα 1: Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των απέναντι γωνιών του



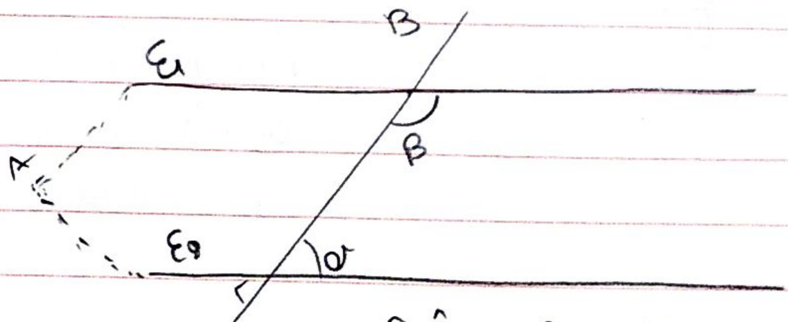
Ισχύει το (Π) $\iff$
$\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}=2$ ορθές
$\Rightarrow \hat{\alpha}+\hat{\beta}=2$ ορθές $-\hat{\gamma}=\hat{\phi}$

Πόρισμα 2: Έστω 2 ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τέμνονται από (ε). Αν εντός εκτός και επί τ' αυτά γωνίες ίσες ή εντός και επί τ' αυτά παραπληρωματικές $\iff \varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



- $\hat{\alpha}=\hat{\beta} \iff \hat{\alpha}=\hat{\gamma} \iff (\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ ως εντός εναλλάξ.
- $\hat{\alpha},\hat{\delta}$ παραπλ. και $\hat{\delta},\hat{\beta}$ παραπλ.

Έστω ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τεμνόμενες από (ε): να σχηματίζουν εντός και επί τ' αυτά γωνίες με άθροισμα < 2 ορθών. Τότε οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ τέμνονται προς το μέρος αυτό.



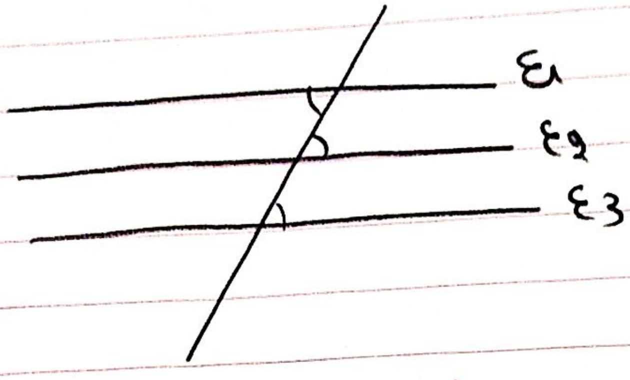
$\hat{\alpha}+\hat{\beta} < 2$ ορθές

Έστω ότι τέμνονται από την άλλη. Θεωρώ το τρίγωνο $\hat{AB\Gamma}$: $\hat{A}+\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1=2$ ορθές

$\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1 = 4$ ορθ. $-(\hat{\alpha}+\hat{\beta})$

άτοπο

Πόρισμα 3: Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ευθείες τ.ω $(\varepsilon_1)\parallel(\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_2)\parallel(\varepsilon_3)$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_3$.



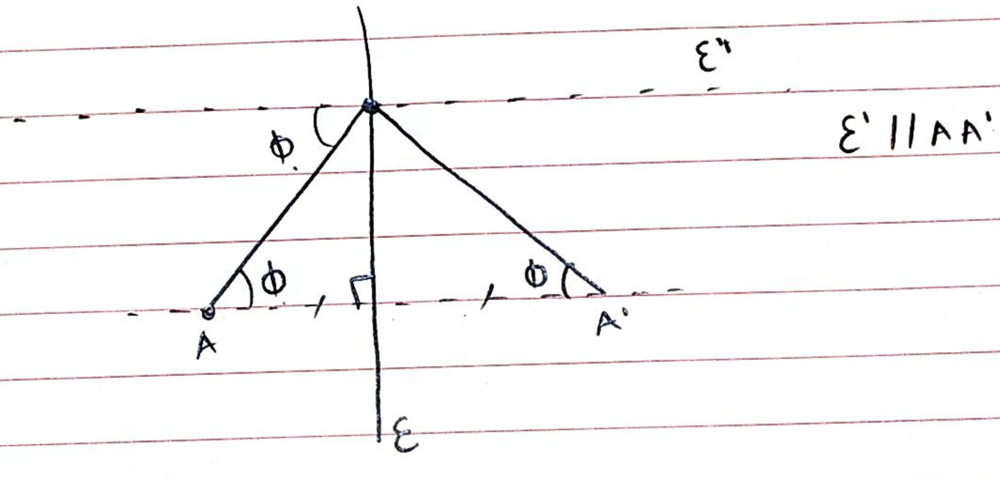
- μέχρι εδώ σχολικά δευ 3 λυκείου

Αντιστροφή

(Το κεφάλαιο αυτό θα έχει όλες 3)

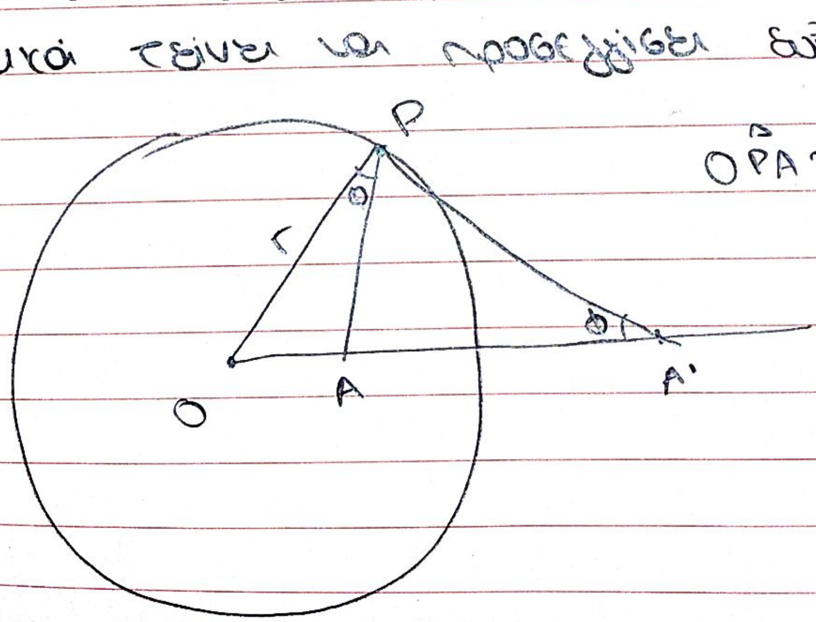
Μετασχηματισμός της αντιστροφής:

→ ανάκλαση προς ευθεία (ε):



$\varepsilon' \parallel AA'$

Διαισθητικά: Φανταζόμαστε έναν άπειρο κύκλο. Αν επιλέξω ένα κομμάτι αυτού (όπως η (ε)) διαισθητικά τείνει να προσεγγίζει ευθεία.



$O\hat{P}A \approx O\hat{P}A' \Rightarrow$

$\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OA'} \Rightarrow$

$OA\,OA' = (OP)^2 \Rightarrow$

$OA \cdot OA' = \rho^2$